CULTIVOS TROPICALES. VOL. 10, No. 2/JUNIO 1988

LA ELECCION OPTIMA DEL TAMAÑO DE MUESTRA EN LA COMPARACION DE DOS TRATAMIENTOS. I. SU DETERMINACION Y DISCUSION

J. REYNALDO Y P. A. FALCON

RESUMEN

Se trabajó simultáneamente con la ecuación que determina el costo total del experimento, el parámetro de no centralidad de la distribución t no central y las herramientas del cálculo diferencial. Se obtuvieron los tamaños óptimos de las muestras que, con un costo dado para el experimento, proporcionan la máxima potencia en la prueba t, su radio óptimo y los límites en que se encuentra. Se determinó, además, el tamaño parejo para la elección de ambas muestras, que proporciona una potencia similar en la prueba a la elección óptima y la relación existente entre los costos de estos dos tipos de elecciones. El uso de las expresiones obtenidas puede contribuir a reducir el número de investigaciones inconclusas por razones económicas o inefectivas.

INTRODUCCION

En múltiples ocasiones un investigador necesita realizar una comparación entre dos tratamientos y para ello toma una muestra de cada población, con el objetivo de someter a prueba de hipótesis $\mu_1 = \mu_2$ contra las alternativas $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1 > \mu_2$ o $\mu_1 < \mu_2$, mediante la prueba t (Ostle, B. 1963).

El costo de la investigación está en función de los costos de aplicación de cada tratamiento y del tamaño de cada una de las muestras en cuestión. Por otra parte, generalmente el investigador dispone de un presupuesto para el trabajo que no debe sobrepasar excesivamente, por lo que es muy deseable determinar el tamaño de la muestra que haga máxima la potencia de la prueba para un costo dado (Kempthorne, 1952).

MATERIALES Y METODOS

Si se supone que el universo está compuesto por grupos homogéneos de K elementos cada uno y que se toman muestras de n_1 y n_2 grupos para la aplicación de los tratamientos (Dixon y Massey, 1974), entonces según (Cochran, 1975) el costo total del experimento está determinado por:

(1) $C = C_0 + K\,(C_1 * n_1 + C_2 * n_2)$ donde:

- C: Costo total del experimento.
- C_1: Costo de aplicación del tratamiento 1 a una Unidad experimental.
- C_2: Costo de aplicación del tratamiento 2 a una Unidad experimental.
- C_0: Gasto general independiente de C_1 y C_2.

Departamento de Matemática, ISCAH, La Habana.

En el trabajo se consideró $C_0=0$. Cuando $C_0 \neq 0$ los resultados obtenidos son validos al sustituir C por $C^* = C - C_0$.

Se supone que las medias de los grupos en los tratamientos son variables aleatorias independientes que se distribuyen normalmente con medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente.

Como la función de potencia de la prueba t es monótona creciente del parametro de no centralidad: (Dixon y Massey, 1974).

$$(2) \quad \gamma = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

donde μ_1 y μ_2 son valores supuestos en la hipótesis alternante H_1, se utilizó el método de los multiplicadores de Langrange (Apostol, 1973) para determinar el tamaño optimo de la muestra.

RESULTADOS Y DISCUSION

De acuerdo con lo planteado en Materiales y Métodos respecto a la función de potencia de la prueba t, se determinaron los valores n_1 y n_2 que hacen máximo (2) su costo total fijo (1).

$$(3) \quad n_1 = \frac{\sigma_1 C}{K\,[\sigma_1 C_1 + \sigma_2 (C_1 C_2)]}$$

$$(4) \quad n_2 = \frac{\sigma_2 C}{K\,[\sigma_2 C_2 + \sigma_1 (C_1 C_2)]}$$

Nótese que se requiere de la estimación previa del radio $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

La garantía de que la elección de los tamaños de muestras dada por (3) y (4) sea la que proporcione la mayor potencia para la prueba es grande, pero no total. En un caso particular puede existir otra solución de (1) que si bien no haya máximo (2), proporcione un mayor número de grados de libertad en la distribucion t no central y esto ocasione que la prueba tenga una mayor potencia. Sin embargo, en la práctica esto es difícil que ocurra, ya que el hecho de que n_1 y n_2 son enteros positivos hace que la variación en el valor γ sea grande, con lo cual una eleccion de los tamaños de las muestras distinta a la ofrecida por (3) y (4) muy probablemente ofrecerá una potencia menor en la prueba. Así se llamó optima a esta eleccion.

Sin perder generalidad, puede suponerse $C_2 \geq C_1$. El radio óptimo de n_2 a n_1 es entonces:

$$(5) \quad \frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

y a partir de (5) se ve claramente que:

$$(6) \quad 0 < \frac{n_2}{n_1} \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

(5) y (6) permiten determinar de antemano la proporción entre los tamaños optimos de las muestras.

En la práctica, para ambos tratamientos puede preferirse la elección de un tamaño igual de muestra a una eleccion optima, pero desigual por ofrecer un mayor prorrateo. Entonces es importante una comparación entre el costo, que ocasiona la eleccion de un tamaño de muestra igual y mantiene el mismo valor de $\mathcal{V}$ que la eleccion optima, (lo cual debe entonces proporcionar una potencia similar en la prueba) y su costo. Si se denota por n este tamaño parejo de las muestras, de (2) se sigue:

$$(7)\quad n = \frac{C(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{K(\sigma_1 C_1^{1/2} + \sigma_2 C_2^{1/2})^2}$$

El radio de n a n_1 y a n_2:

$$(8)\quad \frac{n}{n_1} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 [\sigma_1 + \sigma_2 (\frac{C_2}{C_1})^{1/2}]} \; ; \; \frac{n}{n_2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2 [\sigma_2 + \sigma_1 (\frac{C_1}{C_2})^{1/2}]}$$

Con lo cual:

$$(9)\quad 0 < \frac{n}{n_1} \le \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2} \; ; \; \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2} \le \frac{n}{n_2} < \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2}$$

(8) y (9) permiten determinar apriori la proporción entre n y n_1 ó n_2.

El radio del costo total para la eleccion pareja a la óptima se obtiene de (1) y (7):

$$(10)\quad \frac{C'}{C} = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(1 + \frac{C_2}{C_1})}{[\sigma_1 + \sigma_2 (\frac{C_2}{C_1})^{1/2}]^2}$$

donde C' es el costo total para la elección de un tamaño de muestra parejo para los dos tratamientos, que proporcione una potencia en la prueba similar a la ofrecida por la optima.

Un investigador interesado en la elección pareja, podría utilizar (10) con el fin de valorar como va a ser el costo requerido para esta eleccion al costo que ocasiona la optima.

Pasando al límite cuando $\frac{C_2}{C_1} \longrightarrow 1$ y cuando $\frac{C_2}{C_1} \longrightarrow \infty$ en (10) se obtienen los extremos del intervalo en que se encuentra el radio $\frac{C'}{C}$ que son:

$$\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \quad y \quad \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2}$$

Puede verse facilmente que $1 \le \frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \le 2$;

$1 \le \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2} \le 2$ cuando $\sigma_2^2 \ge \sigma_1^2$ y $\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ge 2$ cuando $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$, con todo lo cual si $C_2 = C_1$ ó $\sigma_2^2 \ge \sigma_1^2$ entonces $1 \le \dfrac{C'}{C} \le 2$ y cuando $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ entonces $\dfrac{C'}{C} \ge 1$ y específicamente tendremos que:

$$\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \le \frac{C'}{C} < \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2}$$

Estos resultados evidencian el cuidado que es necesario tener para tomar la decisión de un tamaño de muestra igual para dos tratamientos, sobre todo cuando $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, pues en este caso los extremos del intervalo en que se encuentra el radio $\dfrac{C'}{C}$ tienden a 2 y a ∞ respectivamente cuando $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} \longrightarrow \infty$. En otras palabras, si σ_1^2 es mucho mayor que σ_2^2, el radio $\dfrac{C'}{C}$ puede ser mucho mayor que 2, es decir C' puede ser mucho mayor que $2C$. Cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ de (3) y (4) los tamaños óptimos de muestras son:

$$(3)' \quad n_1 = \frac{C}{K\,[C_1 + (C_1C_2)^{1/2}]}$$

$$(4)' \quad n_2 = \frac{C}{K\,[C_2 + (C_1C_2)^{1/2}]}$$

y de (5) el radio óptimo de n_2 a n_1:

$$(5)' \quad \frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2}$$

que coincide con el obtenido por Jun-Mo (1973) cuando $K = 1$. De (6) se obtiene:

$$(6)' \quad 0 < \frac{n_2}{n_1} \le 1$$

Lo que evidencia que la elección óptima, en este caso, asigna un tamaño de muestra menor al tratamiento de mayor costo (Cochran, 1975).

El tamaño de muestra igual que proporciona una potencia similar en la Prueba a la eleccion óptima se obtiene de (7).

$$(7)' \quad n = \frac{2C}{K\,(C_1^{1/2} + C_2^{1/2})^2}$$

Nótese que cuando $C_1 = C_2$ la elección pareja y la óptima coinciden (Cochran, 1975).

El radio de n a n_1 ó a n_2 se desprende de (8):

$$(8)' \quad \frac{n}{n_1} = \frac{2}{1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/2}} \qquad \frac{n}{n_2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2}}$$

y de (9)

$$(9)' \quad 0 < \frac{n}{n_1} \leq 1 \; ; \; 1 \leq \frac{n}{n_2} < 2$$

El radio del costo total para la elección pareja a la óptima se obtiene de (10):

$$(10)' \quad \frac{C'}{C} = \frac{2\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)}{\left[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{1/2}\right]^2}$$

y en este caso como ya fue mencionado $1 \leq \frac{C'}{C} < 2$

El uso de las expresiones (3) - (10) ó (3)' - (10)', según sea el caso de $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ó $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ en el diseño de un experimento, puede reducir el número de investigaciones inconclusas por razones económicas o inefectivas.

REFERENCIAS

APOSTOL, T.M. Calculus. Vol. II. Barcelona, Editorial Reverté, 1973. p. 384.

COCHRAN, W.G. Técnicas de muestreo. México, CECSA, 1975. p. 138.

DIXON, W.J. Y F.J. MASSEY JR. Introducción al Análisis Estadístico. La Habana, Instituto Cubano del libro, 1974, Cap. 9 y 14.

JUN-MO NAM. Optimum Sample Sizes for The Comparison, Control and Treatment. Biometrics. 29: 101-102, 1973.

KEMPTHORNE, O. Design and Analysis of Experiments. New York: John Wiley, 1952.

ABSTRACT

OPTIMUM CHOICE OF SAMPLE SIZE FOR COMPARING TWO TREATMENTS. I. ITS DETERMINATION AND DISCUSSION

A simultaneous work was conducted with an equation determining the whole experimental cost, a non-centrality parameter from a non-central t distribution and the tools for a differential calculus. The optimum sample sizes were achieved for providing maximum t test power, its optimum radius and confines. Besides, an equally-sized choice was determined for this pair of samples, supplying the same test power as the optimum choice, as well as the relationship existing between the costs of both choices. It is possible to reduce the number of economically- or ineffectively-unconcluded investigations by means of the above expressions.

Manuscrito recibido el 6/I/87.